Enseignement Spécifique

Application des lois de Newton et de Kepler

Lois et modèles

Comprendre

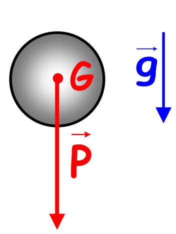
A- Chute verticale d'un solide

1- Force de pesanteur et champ de pesanteur terrestre

En première approximation, on peut dire que le poids d'un objet est égal à la force d'attraction gravitationnelle que la Terre exerce sur lui.

Cette force de pesanteur est représentée par un vecteur $\vec{P}$ possédant:

- Une origine: le centre d'inertie G du corps.
- Une direction: la verticale passant par G.
- Un sens: du haut vers le bas.
- Une intensité: **P = m g**.



Remarque: *En réalité, le poids n'est pas rigoureusement confondu avec la force de gravitation.*

En un point donné M, au voisinage de la Terre, le poids $\vec{P}$ d'un objet de masse m peut s'écrire:

$$\vec{P} = m.\vec{g}$$

P:	Poids (N)
m:	Masse (kg)
g:	Intensité de la pesanteur ($N.kg^{-1}$)

Le vecteur $\vec{g}$ est, par définition, le vecteur champ de pesanteur terrestre au point M considéré.

Ce vecteur champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ possède:

- Une origine: le point M.
- Une direction: la verticale passant par M.
- Un sens: du haut vers le bas.
- Une valeur: l'intensité g de la pesanteur au point M

La valeur de l'intensité g de la pesanteur dépend de la latitude du point M où l'on opère et de son altitude:

g = 9,78N/kg à l'équateur, au niveau de la mer.
g = 9,83N/kg au pôle nord, au niveau de la mer.

La valeur de l'intensité **g** diminue avec l'altitude d'environ 1% tous les 30km.

Remarque: *Pour faciliter les calculs, on pourra prendre, en première approximation, une valeur de l'intensité de la pesanteur g de 10N/kg.*

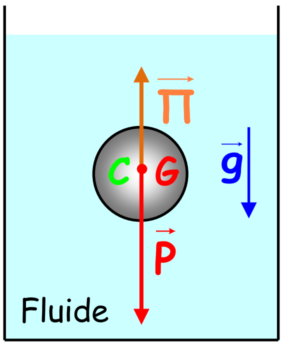
Dans un domaine restreint au voisinage de la Terre (dimensions de l'ordre de quelques kilomètres), on peut considérer que le champ de pesanteur est uniforme: le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ a même direction, même sens et même valeur en tout point de ce domaine restreint.

2- Poussée d'Archimède

La surface d'un solide immergé dans un fluide (liquide, gaz) est constamment "frappée" par les molécules de ce fluide. Ces chocs sont à l'origine de la poussée d'Archimède.

La poussée d'Archimède est une force de contact répartie sur la surface de contact solide-fluide. On la représente par un vecteur $\vec{\Pi}$ qui possède:

- Une origine: le centre d'inertie C du volume de fluide déplacé.
- Une direction: la verticale passant par C.
- Un sens: du bas vers le haut.
- Une valeur égale au poids du fluide déplacé.



La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ exercée par un fluide de masse volumique ρ_{fluide} peut s'écrire:

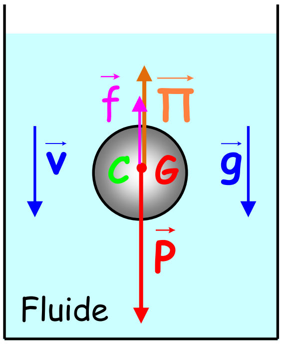
$$\vec{\Pi} = -\rho_{fluide} . V . \vec{g}$$

Π: Poussée d'Archimède (N)
ρ_{fluide}: masse volumique du fluide ($kg.m^{-3}$)
V: Volume de fluide déplacé (m^3)
g: Intensité de la pesanteur ($N.kg^{-1}$)

Remarque: *Le centre d'inertie C du volume de fluide déplacé peut être différent du centre d'inertie G du solide. C'est le cas, notamment, si le solide n'est que partiellement immergé dans le fluide ou s'il n'est pas homogène. Par contre, dans le cas fréquent d'un solide homogène totalement immergé dans le fluide, le centre d'inertie C du volume de fluide déplacé est confondu avec le centre d'inertie G du solide.*

3- Force de frottement fluide

Si un solide se déplace dans un fluide, il apparaît des forces de "frottement fluide" sur toute la surface du solide. Ces forces de frottement fluide peuvent être résistantes (chute d'une bille ralentie par la présence d'air ou d'eau) ou motrices (feuille emportée par le vent).



Dans le cas d'un solide homogène animé d'un mouvement de translation dans le fluide, on les modélise par un vecteur $\vec{f}$ de sens opposé au mouvement si les frottements sont résistants. Comme on étudie le mouvement du centre d'inertie G, on reporte en ce point toutes les forces extérieures agissant sur le solide, notamment $\vec{f}$.

La valeur **f** de la force de frottement dépend de la nature du fluide, mais également de la vitesse v du solide en translation, de sa forme, de son état de surface.

Souvent, la valeur de la force de frottement sera modélisée par une expression de la forme: $\mathbf{f=k.v^n}$ où n est un entier à déterminer. Pour des vitesses faibles la force de frottement sera modélisée par une expression de la forme: $\mathbf{f=k.v}$; tandis que pour des vitesses plus importantes elle sera modélisée par une expression de la forme: $\mathbf{f=k.v^2}$.

C'est l'expression qui donne la meilleure adéquation entre les prévisions théoriques et les résultats expérimentaux qui, bien évidemment, doit être retenue.

4- Chute verticale libre

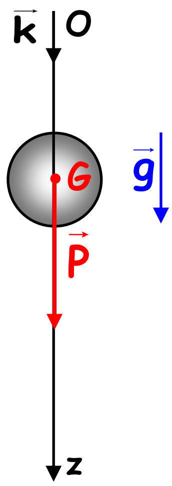
4-1- Définition

Un solide est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$.

C'est ce qui se passe si on supprime l'air dans une enceinte pour y étudier la chute d'un solide dans le vide (au voisinage de sol de la Lune, sans atmosphère, toutes les chutes sont libres).

Remarque: *La chute est quasi libre si on étudie, dans l'air, la chute d'une bille de masse volumique grande par rapport à la masse volumique de l'air (la poussée d'Archimède est alors négligeable par rapport au poids) sur une hauteur de quelques mètres (les forces de frottement sont, à faible vitesse, également négligeables par rapport au poids).*

4-2- Chute verticale libre, sans vitesse initiale



On considère une petite bille en plomb de masse m est lâchée, sans vitesse initiale, à partir de l'origine d'un axe vertical $(O;\ \vec{k})$ orienté vers le bas. Après un parcours de 2,0m, la bille frappe le sol.

La bille étant en plomb, la valeur de son poids P est très grande par rapport à la valeur de la poussée d'Archimède Π dans l'air. On peut donc négliger la poussée d'Archimède.

De plus, la bille est petite, de forme sphérique, sa vitesse restera faible (hauteur de chute petite). Dans ces conditions, la force de frottement fluide exercée par l'air sur la surface de la bille est également négligeable par rapport au poids.

La seule force agissant sur la bille est donc le poids $\vec{P}$. La chute est dite libre.

On peut établir l'équation différentielle du mouvement et chercher sa solution analytique.

Le référentiel Galiléen choisi est la Terre auquel est associé le repère $(O;\ \vec{k})$.

La seule force qui s'exerce sur la bille est son poids:

$$\vec{P}=m.\vec{g}.$$

Le référentielle Terrestre étant Galiléen, on applique la seconde loi de Newton à la bille:

$$\vec{P} = m.\vec{g} = m.\overrightarrow{a_G}$$

On en déduit la relation:

$$\vec{g} = \overrightarrow{a_G}$$

Par projection sur l'axe Oz on aura:

$$g = a_G$$

De plus, on sait que:

$$a_G = \frac{dv}{dt}$$

D'où l'équation différentielle relative à la vitesse de la bille:

$$\frac{dv}{dt} = g$$

On cherche la fonction **v(t)** qui est solution de cette équation différentielle du premier ordre, c'est à dire la fonction **v(t)** qui admet **g** comme dérivée.

On aura pour **v(t)**:

$$v(t) = g\ t + Cte$$

A l'instant initial la vitesse de la bille est nulle, donc:

$$v(0) = Cte = 0$$

D'où l'expression de la vitesse **v(t)**:

$$v(t) = g\ t$$

On cherche de nouveau la primitive de **v(t)**, .c'est à dire La fonction **z(t)** qui admet **g t** comme dérivée.

On aura pour **z(t)**:

$$z(t) = \frac{1}{2}.g.t^2 + Cte$$

A l'instant initial on a:

$$z(0) = Cte = 0$$

D'où l'expression de **z(t)**:

$$z(t) = \frac{1}{2}.g.t^2$$

Les équations horaires du mouvement sont donc:

$$z(t) = \frac{1}{2}.g.t^2 \qquad v(t)=g.t \qquad a=g$$

On dit que la bille est animée d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré (le vecteur accélération ne change pas).

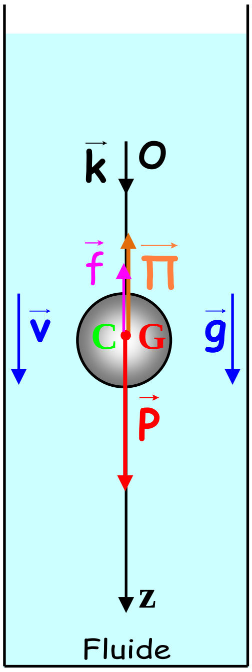
La bille frappe le sol au point **S** à l'instant t_S tel que:

$$t_S = \sqrt{\frac{2.z}{g}} = \sqrt{\frac{2\times2,0}{9,8}} = 0,64s$$

La vitesse V_S de la bille en ce point **S** est:

$$V_S = g.t_S = g.\sqrt{\frac{2.z_S}{g}} = \sqrt{2.g.z_S} = \sqrt{2\times9,8\times2,0} = 6,3m.s^{-1}$$

5- Chute verticale d'une bille soumise à une force de frottement



La valeur **f** de la force de frottement dépend de la nature du fluide, mais elle dépend également de la vitesse **v** du solide en translation, de sa forme, de son état de surface.

On considère une bille en verre de masse volumique $\rho_{bille}=2600kg.m^{-3}$, et de rayon $r=1mm$.

Cette bille est lâchée, sans vitesse initiale, à la surface d'un tube vertical contenant de l'huile de masse volumique $\rho_{huile}=970kg.m^{-3}$ dont on veut calculer le coefficient de viscosité η, sachant que la vitesse limite de la bille est $V_{lim}=0,71mm.s^{-1}$.

Le volume de la bille est donnée par la relation:

$$V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$$

La masse de la bille est:

$$m = \rho_{bille}.V = \frac{4}{3}.\pi.\rho_{bille}.r^3$$

Le poids de la bille est donné par la relation:

$$P = m\ .g = \frac{4}{3}.\pi.\rho_{bille}.g.r^3$$

La valeur Π de la poussée d'Archimède exercée par le liquide sur la bille est égale au poids du liquide déplacé par la bille:

$$\Pi = m_{huile}\ .g = \frac{4}{3}.\pi.\rho_{huile}.g.r^3$$

Si on note η le coefficient de viscosité de l'huile, l'intensité f de la force de frottement fluide $\vec{f}$, opposée à la vitesse v, peut s'écrire en utilisant la relation de Stokes (valable lorsque la vitesse reste faible):

$$f = 6.\pi.\eta.r.v$$

Les forces extérieures exercées sur la bille étant le poids $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et la force de frottement fluide $\vec{f}$, la seconde loi de Newton permet d'écrire la relation:

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m.\vec{a_G}$$

C'est à dire:

$$P.\vec{k} - \Pi.\vec{k} - f.\vec{k} = m.a_G.\vec{k}$$

Par projection sur l'axe Oz, on aura:

$$P - \Pi - f = m.a_G$$

En remplaçant les valeurs des forces par leur expression, on aura:

$$\frac{4}{3}.\pi.\rho_{bille}.g.r^3 - \frac{4}{3}.\pi.\rho_{huile}.g.r^3 - 6.\pi.\eta.r.v = \frac{4}{3}.\pi.\rho_{bille}.r^3.a_G$$

De plus, on sait que:

$$a_G = \frac{dv}{dt}$$

D'où l'équation différentielle relative à la vitesse de la bille:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9.\eta}{2.\rho_{bille}.r^2}.v = g.\left(1 - \frac{\rho_{huile}}{r_{bille}}\right)$$

Cette équation différentielle s'écrit sous la forme simplifiée:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$$

Avec:

$$\tau = \frac{2.\rho_{bille}.r^2}{9.\eta} \quad \text{et} \quad C = g\left(1 - \frac{\rho_{huile}}{\rho_{bille}}\right)$$

Remarque: *La constante τ est appelée constante de temps du montage.*

A l'instant initial, la vitesse de la bille étant nulle, son accélération est donc:

$$a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = C = g\left(1 - \frac{\rho_{huile}}{\rho_{bille}}\right)$$

Initialement nulle, la force de frottement $\vec{f}$ augmente proportionnellement à la vitesse jusqu'à atteindre à un instant t une valeur limite $\overrightarrow{f_{lim}}$. Le poids $\vec{P}$ est alors compensé par la somme des deux forces résistantes $\vec{\Pi} + \vec{f}$. La somme des forces est alors nulle et, d'après la deuxième loi de Newton on aura:

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m.\overrightarrow{a_{lim}} = \vec{0}$$

A cet instant on aura donc:

$$a_{lim} = \left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$$

L'équation différentielle précédente s'écrira alors:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{lim} + \frac{V_{lim}}{\tau} = C$$

La vitesse limite V_{lim} atteinte par la bille est donc:

$$V_{lim} = C.\tau = g\left(1 - \frac{\rho_{huile}}{\rho_{bille}}\right).\frac{2.\rho_{bille}.r^2}{9.\eta} = \frac{2.g.r^2.\left(\rho_{bille} - \rho_{huile}\right)}{9.\eta}$$

De cette relation on en déduit l'expression donnant le coefficient de viscosité η:

$$\eta = \frac{2.g.r^2.\left(\rho_{bille} - \rho_{huile}\right)}{9.V_{lim}}$$

$$\eta = \frac{2 \times 9,8 \times \left(1,0.10^{-3}\right)^2 \times (2600-970)}{9 \times 0,71.10^{-3}} = 5,0 kg.m^{-1}.s^{-1} = 5,0 \text{ Pa.s}$$

L'unité de la viscosité étant en Pascal.Seconde (Pa.s) ou Poiseuille (Pl):

$$1 Pa.s = 1 Pl = 1 \ kg.m^{-1}.s^{-1}$$

B- Mouvement d'un projectile

1- Généralités

On appelle projectile tout corps lancé au voisinage de la Terre avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale.

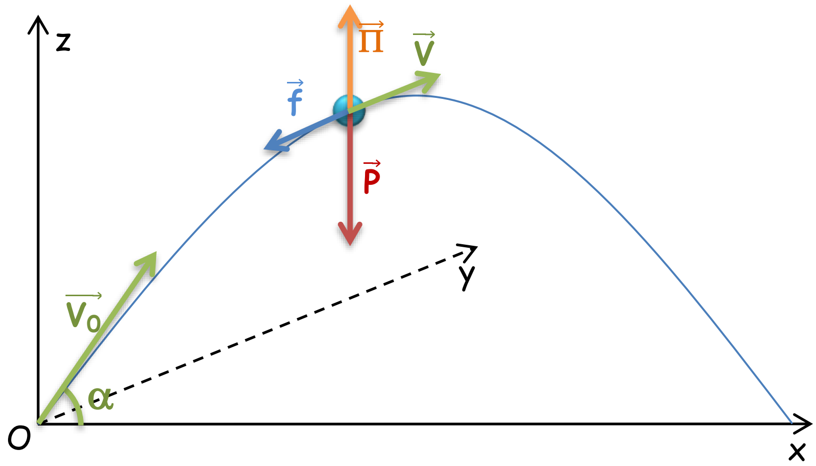
En mécanique le mouvement d'un corps dépend de l'accélération (donc des forces) et des conditions initiales (vitesse et position).

1-1- Définition du système

Le système étudié est le projectile dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On y associe le repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1-2- Bilan des forces extérieures

Le projectile M (système) se déplaçant dans le référentiel Terrestre peut être soumis à diverses forces (poids $\vec{P}$, poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, forces de frottement fluides $\vec{f}$, etc.).



Toutefois, on ne tiendra compte ni de la poussée d'Archimède, ni de la force de frottement fluide exercée sur le projectile.

On assimilera le projectile à un point matériel M.
La seule force qui agit est le poids $\vec{P} = m.\vec{g}$ du corps: le solide est en "chute libre".

1-3- Utilisation de la seconde loi de Newton

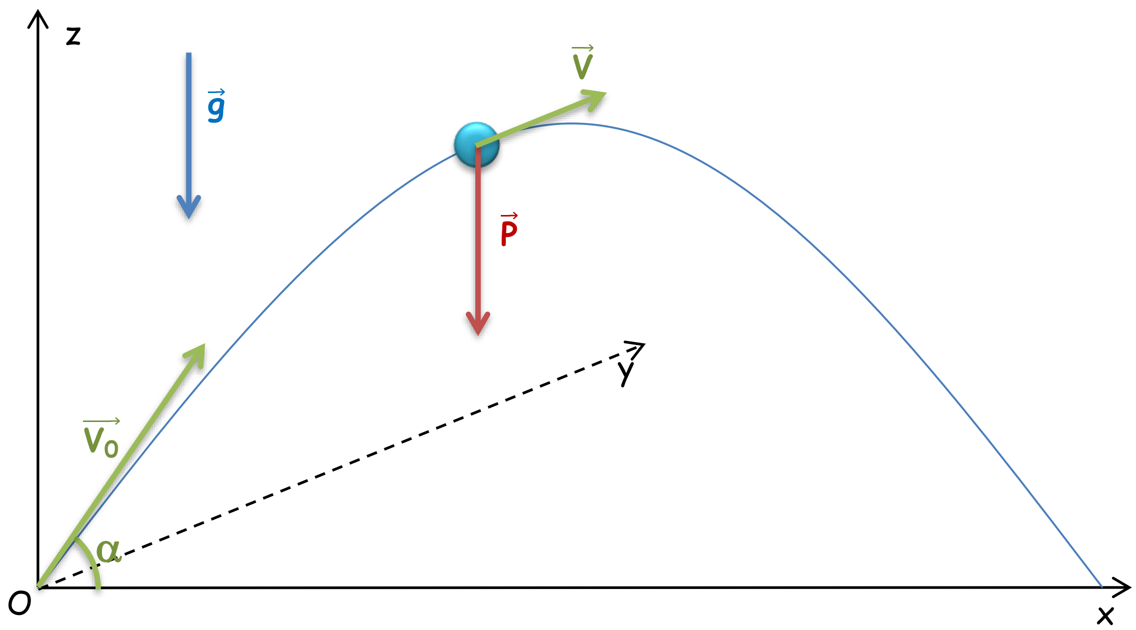
On applique la seconde loi de Newton dans le référentiel terrestre où l'application du théorème du centre d'inertie donne:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a}$$

C'est-à-dire avec:

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Etant donné que le mouvement se fait dans une petite région l'accélération est constante, et ne dépend ni de la masse de l'objet, ni de la manière dont il a été lancé: on dira que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est invariant.



1-4- Conditions initiales

Le projectile est lancé depuis le point ***O***, choisi comme origine. Le plan d'étude choisi est le plan (xOz) contenant le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ et le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$.

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{V_0}\begin{vmatrix} V_{x0} = V_0.\cos\alpha \\ V_{y0} = 0 \\ V_{z0} = V_0.\sin\alpha \end{vmatrix} \qquad \vec{a} = -g.\vec{k}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{vmatrix}$$

2- Les équations du mouvement

Le mouvement s'effectuant dans le plan (xOy), les composantes des vecteurs suivant l'axe Oy seront toujours nulles.

2-1- Equation horaire du vecteur vitesse

L'accélération $\vec{a}$ étant la dérivée de la vitesse $\vec{v}$, on en déduit le vecteur vitesse $\vec{v}$ en recherchant la primitive de l'accélération:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \int \vec{a}.dt$$

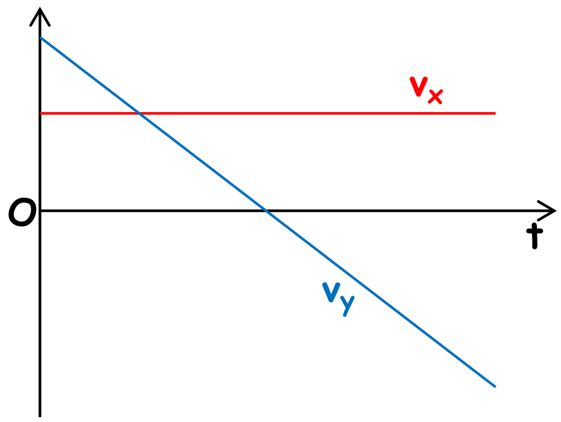
Soit en passant par les composantes:

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_z}{dt} = -g \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = V_0.\cos\alpha \\ v_y = 0 \\ v_z = -g.t + V_0.\sin\alpha \end{array}\right.$$

Les constantes d'intégration dépendant des conditions initiales.

On constate que la composante v_x de la vitesse $\vec{v}$ est indépendante du temps, tandis que la composante v_z est une fonction affine du temps.

D'où le graphique ci-contre représentant l'évolution temporelle des composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$.



2-2- Equation horaire du vecteur position

La vitesse $\vec{v}$ étant la dérivée de la position $\overrightarrow{OM}$, on en déduit le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en recherchant la primitive de la vitesse:

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \int \vec{v}.dt$$

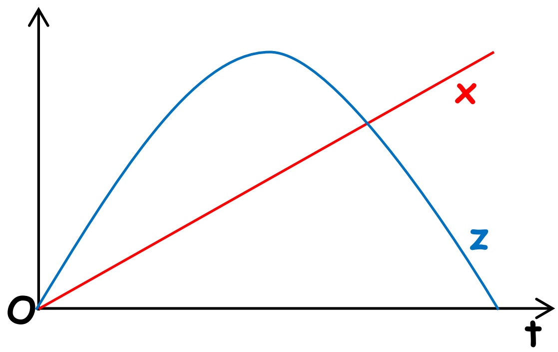
Soit en passant par les composantes:

$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = \dfrac{dx}{dt} = V_0.\cos\alpha \\ v_y = \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ v_z = \dfrac{dx}{dt} = -g.t + V_0.\sin\alpha \end{vmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = V_0.\cos\alpha.t \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin\alpha.t \end{vmatrix}$$

Les constantes d'intégration dépendant des conditions initiales.

On constate que la composante **x** de la position $\overrightarrow{OM}$ est une fonction linéaire du temps, tandis que la composante **z** est une fonction parabolique du temps.

D'où le graphique ci-contre représentant l'évolution temporelle des composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.



2-3- Equation de la trajectoire du projectile

L'équation de la trajectoire est une fonction de la forme **z = f(x)**, puisque le mouvement a lieu dans le plan (xOz).

Il est nécessaire d'éliminer le paramètre t, en utilisant l'équation horaire x(t) établie précédemment:

$$x = V_0.\cos\alpha.t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{V_0.\cos\alpha}$$

En injectant cette expression dans la seconde équation horaire, il vient:

$$z = -\frac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin\alpha.t \quad \Rightarrow \quad z(x) = -\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + \tan\alpha.x$$

Cette équation est celle d'une fonction parabolique.

2-4- Expression de la flèche

La flèche correspond à l'altitude maximale atteinte (**z_S = H**). Cette altitude correspond au sommet S de la trajectoire.

Pour déterminer la valeur de la flèche **z_S**, on peut remarquer qu'en ce point S:

- La composante verticale de la vitesse est nulle: **$v_{zS} = 0$**.
- La tangente à la courbe est horizontale, donc: $\left(\frac{dz}{dx}\right)_S = 0$.

Remarque: *Au point S la vitesse $\vec{v_S}$ du projectile n'est pas nulle, seule sa composante verticale **v_{zs}** est nulle.*

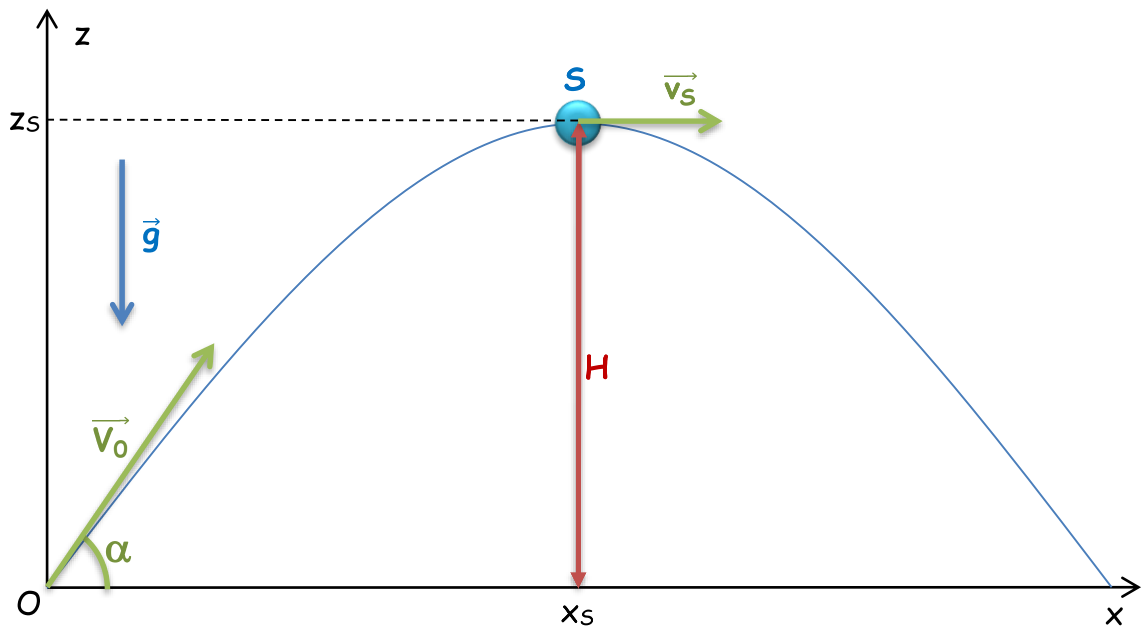
Première méthode: basée sur le raisonnement physique, elle est la plus rapide et sera donc privilégiée.

La composante verticale **v_{zs}** de la vitesse étant nulle, on aura:

$$v_{zs} = -g.t_S + V_0.\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad t_S = \frac{V_0.\sin\alpha}{g}$$

En injectant cette expression dans la seconde équation horaire, il vient:

$$z_S = -\frac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin\alpha.t_S \quad \Rightarrow \quad H = z_S = -\frac{V_0^2.\sin^2\alpha}{2.g}$$



Seconde méthode: basée sur le raisonnement mathématique, elle est plus longue et fait appel au fait qu'une courbe a sa dérivée qui s'annule en ses extrémum.

On commence par déterminer l'abscisse x_s de la flèche.

La dérivée de l'équation de la trajectoire du projectile au point S est nulle, donc:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(-\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + \tan\alpha.x\right)_S = 0$$

C'est à dire:

$$-\frac{2.g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}.x_S + \tan\alpha = 0$$

On aura ainsi pour l'abscisse x_s de la flèche:

$$x_S = \frac{V_0^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g}$$

Ainsi la flèche $z_S = H$ de la trajectoire est obtenue en remplaçant l'abscisse x_S par sa valeur dans l'expression de l'équation de la trajectoire:

$$z_S = -\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}.\left(\frac{V_0^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g}\right)^2 + \tan\alpha.\frac{V_0^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g}$$

Soit après simplification:

$$H = z_S = -\frac{V_0^2.\cos^2\alpha}{2.g}$$

2-5- Expression de la portée

La portée correspond à la distance maximale atteinte ($x_A = D$). Cette distance correspond au point A de la trajectoire pour laquelle la composante z_A a une valeur nulle. On aura ainsi:

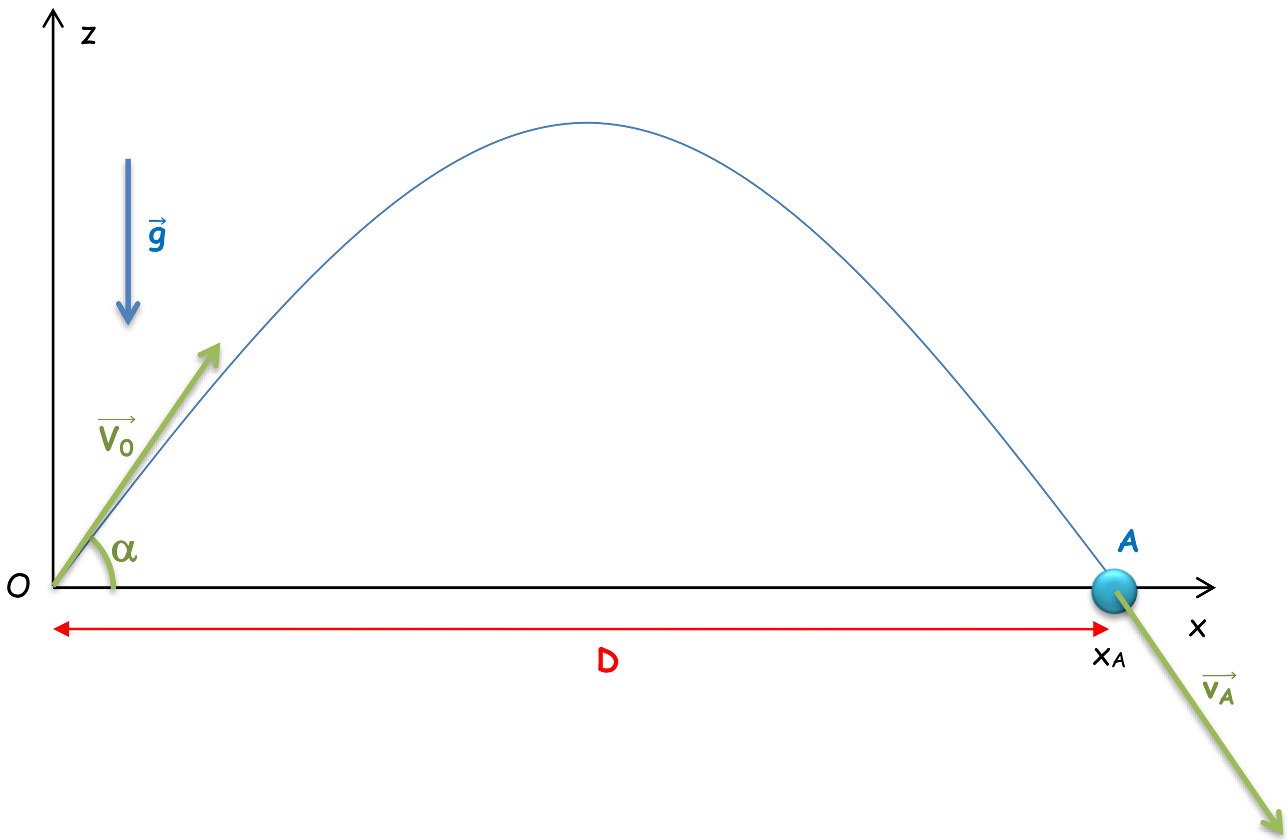
$$z_A = -\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}.x_A^2 + \tan\alpha.x_A = 0$$

La solution $x_A = 0$ correspondant au point d'origine, on en déduit la valeur de x_A:

$$x_A = \frac{2.V_0^2.\cos\alpha.\sin\alpha}{g}$$

Comme $2.\cos\alpha.\sin\alpha=\sin 2\alpha$, l'expression donnant la valeur **D** de la portée est:

$$D = \frac{V_0^2.\sin 2\alpha}{g}$$



Remarque: *La valeur* V_A *de la vitesse de l'objet en A est la même que celle de la vitesse à l'instant initial (*$V_A=V_0$*). Seul l'angle avec l'horizontal est changé (*$-\alpha$*).*

2-6- Influence des paramètres initiaux sur la flèche et la portée

On constate que les valeurs de la flèche **H** et de la portée **D** sont proportionnelles à V_0^2.

Pour une valeur donnée de l'angle α; plus la valeur V_0 de la vitesse initiale est grande, plus le projectile s'élève et parcourt une distance importante.

Pour une valeur donnée de la vitesse V_0, on constate que:

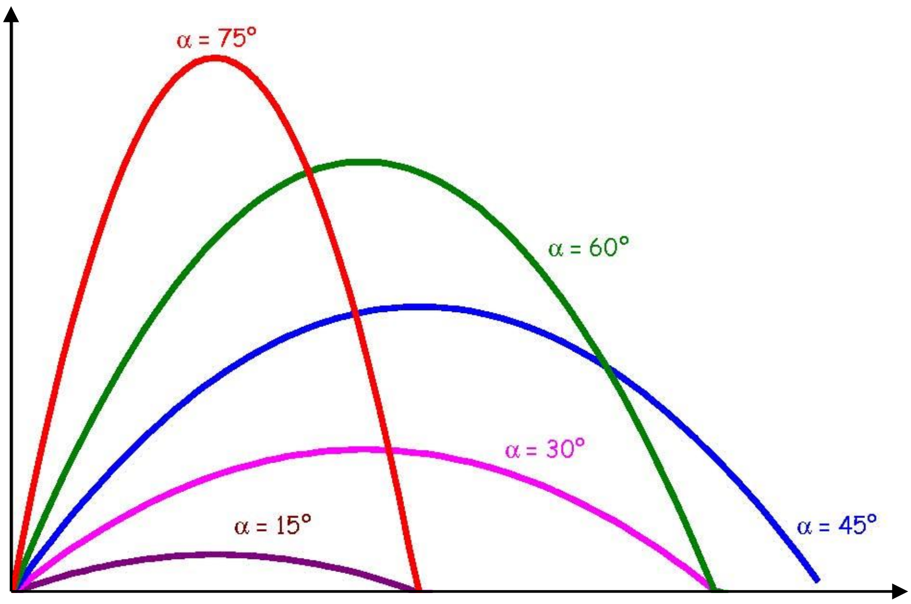
- Lorsque l'angle α croit de **0°** à **45°**, la flèche **H** et la portée **D** augmentent.

- Pour α**=45°**, la portée **D** est maximale (**sin2**α**=1**). C'est cette valeur que les lanceurs de poids, de marteau ou de javelot, recherchent pour donner à leurs jets une efficacité optimale.

- Lorsque l'angle α croit de **45°** à **90°**, la flèche **H** continue à augmenter, alors que la portée **D** diminue.

- La flèche est maximale et la portée est nulle pour α**=90°**: on retrouve alors le cas particulier de la chute libre verticale.

Pour V_0 donné, deux projectiles lancés respectivement avec les angles de tir α_1 et α_2 complémentaires ont la même portée, mais des flèches différentes.



Remarque: *On peut retrouver l'angle pour lequel on obtient la portée maximale en étudiant la relation:*

$$D = \frac{V_0^2 . \sin 2\alpha}{g}$$

On constate que **D** *est maximum si on a* ***sin2****α****=1****, c'est-à-dire* *α****=45°****.*

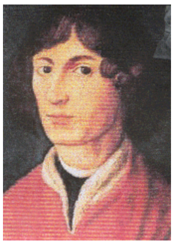
C- Planètes et satellites

1- Historique

Depuis la plus haute Antiquité les hommes ont cherché à décrire et à comprendre le mouvement des objets célestes.

Pendant tout le Moyen Age, appliquant le système du savant grec Claude Ptolémée (2ème siècle), on pense que la Terre est le centre du monde et que les astres tournent autour d'elle.

Nicolas Copernic, savant Polonais, montre que la Terre, comme les autres planètes, tourne sur elle même et autour du Soleil (Traité sur les révolutions du monde céleste, 1543).



Johannes Képler, savant allemand, exploite les mesures de son maître danois Tycho Brahé et énonce les trois lois qui régissent le mouvement des planètes autour du Soleil (La nouvelle astronomie, 1609).

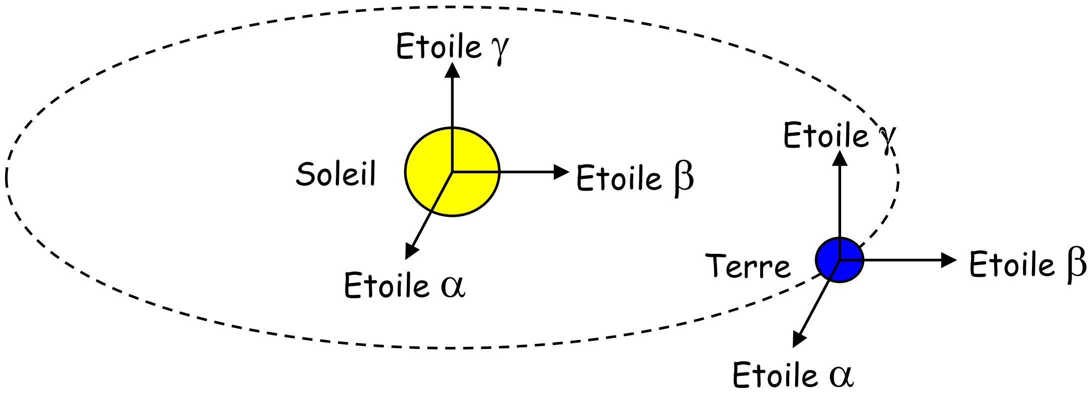
C'est le savant anglais Isaac Newton (Sir) qui énonce la loi de gravitation universelle, permettant d'expliquer de nombreux mouvements célestes (Principes mathématiques de philosophie naturelle, 1686).

Certains phénomènes de la mécanique céleste seront expliqués par la mécanique relativiste d'Einstein au 20ème siècle.

La connaissance de l'Univers physique occupe, encore de nos jours, de nombreux chercheurs.

2- Les trois lois de Kepler

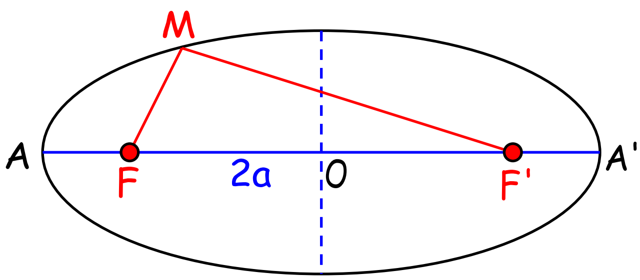
Ces trois lois sont valables dans les référentiels héliocentrique (lié au soleil) et géocentrique (lié à la Terre), considérés comme étant Galiléen.



2-1- Première loi de Kepler – Loi des orbites

Dans le référentiel héliocentrique, le centre de chaque planète décrit une trajectoire elliptique dont le Soleil S est l'un des foyers.

Une ellipse est formée par l'ensemble des points dont la somme des distances aux deux foyers, F et F', est constante:



Grand axe de l'ellipse $AA' = 2a$

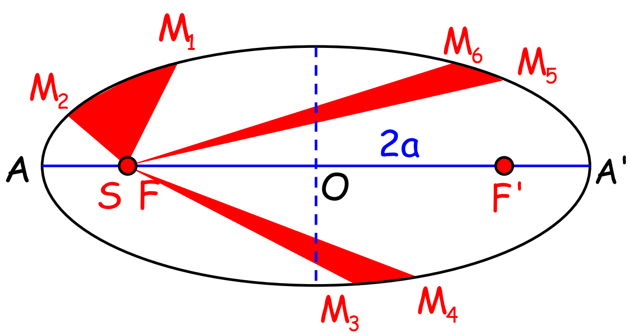
$MF + MF' = 2a$

Remarque: *Dans un soucis de simplification on considèrera les trajectoires comme étant circulaires et non elliptiques.*

2-2- Deuxième loi de Képler – Loi des aires

Dans le référentiel héliocentrique, le segment de droite qui relie les centres du Soleil S et de la planète M "balaie" des aires égales pendant des durées égales.

Le centre S du Soleil est confondu avec le foyer de l'ellipse que décrit le centre M de la planète.



Grand axe de l'ellipse $AA' = 2a$

$MF + MF' = 2a$

Si les durées de déplacement de la planète de M_1 en M_2, de M_3 en M_4 et de M_5 en M_6 sont identiques, alors les aires balayées par la planète (en rouge) sont égales.

La vitesse la plus grande de la planète est en A, point le plus rapproché du Soleil (périhélie). La vitesse la plus faible est en A', point le plus éloigné du Soleil (Aphélie).

2-3- Troisième loi de Képler – Loi des périodes

Dans le référentiel héliocentrique, le rapport entre le carré de la période de révolution T de chaque planète et le cube du demi-grand axe a de l'orbite elliptique est constant:

$$\frac{T^2}{a^3} = K$$

La valeur de la constante **K** ne dépend que de la masse du Soleil.

Remarque: *Les trois lois de Képler sont également valables pour les satellites de la Terre dans le référentiel géocentrique. La constante* ***K'*** *ne dépend alors que de la masse de la Terre.*

2-4- Le système solaire

Le Système solaire est composé d'une étoile, le Soleil, de neuf planètes, de soixante trois satellites gravitant autour de ces planètes et de nombreux petits astres appelés météorites, astéroïdes, comètes, etc.....

Le Soleil, cœur du Système solaire, représente 99,90% de la masse de l'ensemble.

Les planètes sont des corps non lumineux qui gravitent autour du Soleil. Ces planètes se répartissent en deux familles:

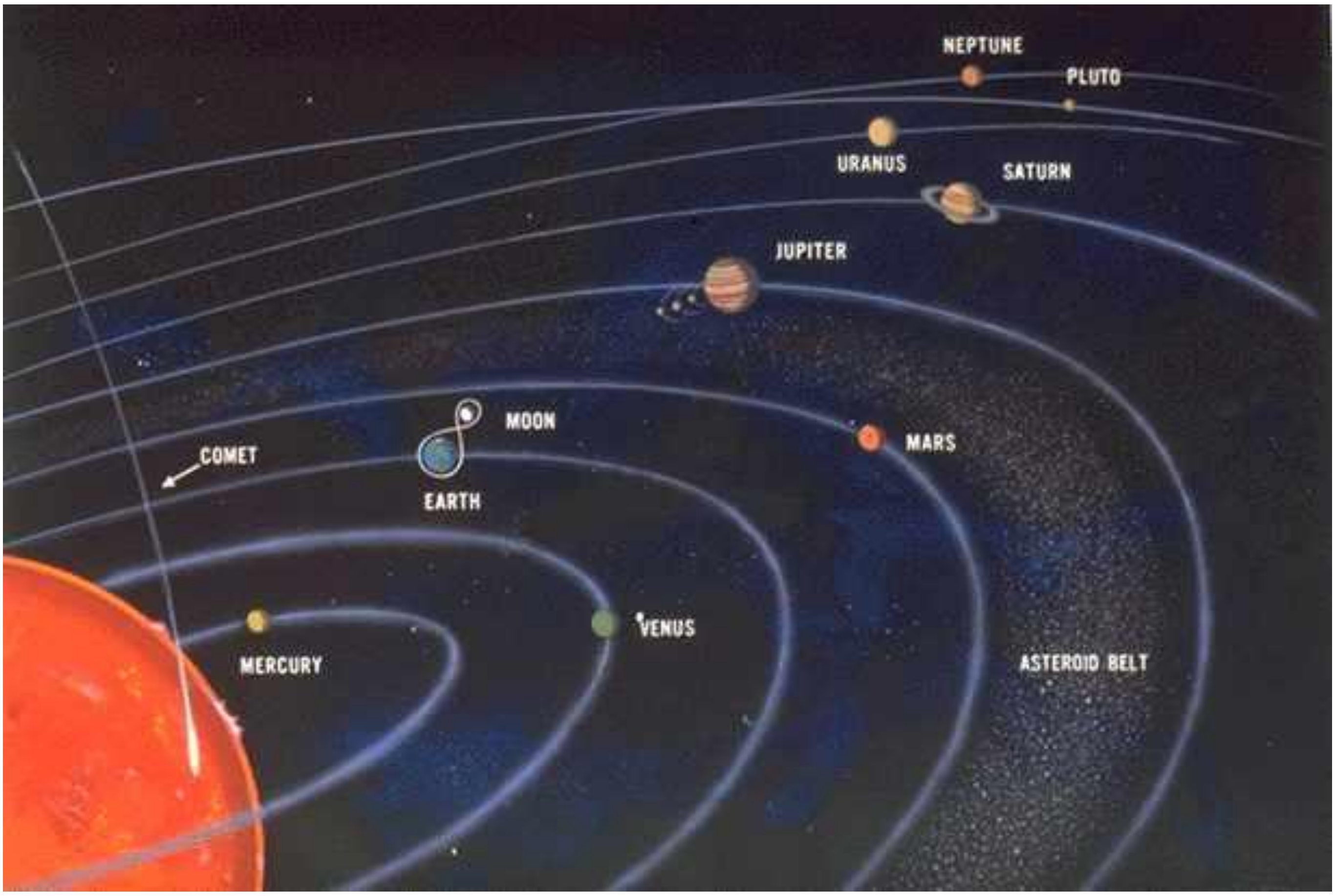
- Les planètes telluriques (Mercure, Vénus, la Terre et Mars) sont de dimension modeste mais possèdent une densité élevée et une fine couche d'atmosphère car leur gravité est faible.

- les planètes joviennes (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune), qui sont les plus lointaines et les plus grandes, ont une densité bien plus faible. Elles sont composées d'une épaisse couche d'hydrogène et d'hélium entourant un noyau de glace massif. Ces planètes ont de nombreux satellites et des anneaux plus ou moins bien développés.

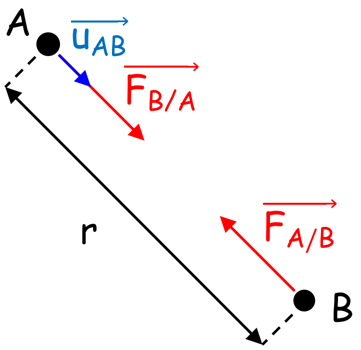
- Pluton est méconnue et donc mise à part, bien qu'elle s'apparente aux planètes telluriques.

Autour du Soleil, entre Mars et Jupiter, gravite une ceinture d'astéroïdes. D'autres astéroïdes ont leurs propres orbites.

Des comètes venant de la ceinture de Kuiper ou du nuage de Oort possèdent des orbites très inclinées par rapport à l'écliptique.



3- La loi de gravitation universelle



Deux objets ponctuels A et B de masse M_A et M_B, exercent l'un sur l'autre une force attractive, dirigée suivant la droite qui les joint.

Cette force varie proportionnellement au produit de leurs masses et à l'inverse du carré de la distance qui les sépare.

$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}} = -G.\frac{M_A.M_B}{r^2}.\overrightarrow{u_{AB}}$$

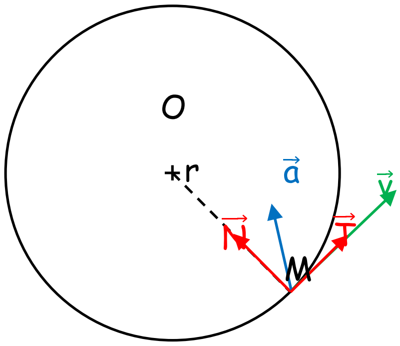
$$F_{A/B} = F_{B/A} = G.\frac{M_A.M_B}{r^2}$$

$\overrightarrow{u_{AB}}$: Vecteur unitaire dirigé de A vers B
r: Distance entre A et B
G: Constante de gravitation ($G=6,67.10^{-11}$ s.i.)

Cette relation est encore vraie pour deux objets à répartition sphérique de masse. La distance r est alors égale à la distance séparant le centre des deux sphères.

4- Mouvement circulaire d'un mobile ponctuel

Désignons par $\vec{v}$ le vecteur vitesse et $\vec{a}$ le vecteur accélération d'un mobile ponctuel décrivant une trajectoire circulaire.



Lors d'un mouvement circulaire, le vecteur vitesse $\vec{v}$ est toujours tangent à la trajectoire:

$$\vec{v}=v.\vec{T}$$

Le vecteur accélération $\vec{a}$, qui est toujours dirigée vers l'intérieur de la trajectoire, a une composante normale et une composante tangentielle, d'où la relation:

$$\vec{a} = a_T.\vec{T} + a_N.\vec{N}$$

La composante tangentielle a_T de l'accélération, qui peut être positive ou nulle, fait varier la valeur de la vitesse. Cette composante est donné par la relation:

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

La composante normale a_N de l'accélération, qui est positive, modifie la direction de la vitesse. Cette composante est donné par la relation:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

On écrira ainsi le vecteur accélération $\vec{a}$ sous la forme:

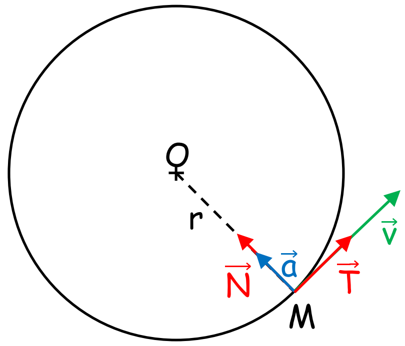
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{T} + \frac{v^2}{r}.\vec{N}$$

5- Mouvement circulaire uniforme d'un mobile ponctuel

Si le mobile **M** ponctuel décrit sa trajectoire circulaire à vitesse **v** constante on dit qu'il est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

La valeur de la vitesse **v** étant constante, seule la direction du vecteur vitesse varie, donc le vecteur vitesse $\vec{v}=v.\vec{T}$ est toujours tangent à la trajectoire.

De ce fait, l'accélération tangentielle $a_T = \frac{dv}{dt}$ est nulle



La valeur $a_N = \frac{v^2}{r}$ de l'accélération normale qui n'est pas nulle, traduit la variation de la direction du vecteur vitesse.

Si ω est la vitesse angulaire constante du mobile, alors les intensités des vecteurs vitesse et accélération s'écriront:

$$v = r.\omega \qquad \text{et} \qquad a = a_N = \frac{v^2}{r} = r.\omega^2$$

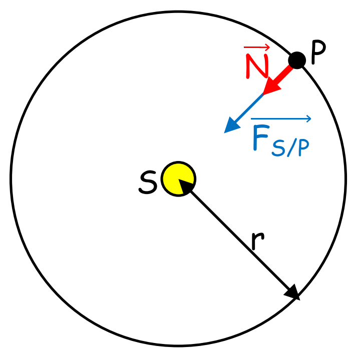
Si un point M est animé d'un mouvement circulaire uniforme, alors:

- **Le vecteur vitesse $\vec{v} = v.\vec{T}$ est tangent au cercle.**
- **Le vecteur accélération $\vec{a} = a_N.\vec{N} = \frac{v^2}{r}.\vec{N}$ est centripète.**

On dit que le mobile ponctuel M est soumis à une force centrale (ou radiale), c'est-à-dire constamment orientée vers le centre.

6- Application de la deuxième loi de Newton

On considère dans le référentiel héliocentrique galiléen le mouvement d'une planète du système solaire de masse M_P. Cette planète, réduite à son centre d'inertie **P** est soumise à une force radiale unique, à savoir la force d'attraction gravitationnelle $\overrightarrow{F_{S/P}}$ exercée par le soleil de masse M_S:



$$\overrightarrow{F_{S/P}} = G.\frac{M_S.M_P}{r^2}.\vec{N}$$

En appliquant la seconde loi de Newton à la planète **P**, on aura:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_{S/P}} = M_P.\overrightarrow{a_P}$$

Par comparaison de ces deux relations on en déduit l'expression du vecteur accélération $\overrightarrow{a_P}$ auquel est soumis la planète **P**:

$$\overrightarrow{a_P} = G.\frac{M_S}{r^2}.\vec{N}$$

Ce vecteur accélération $\overrightarrow{a_P}$ est de la forme:

$$\overrightarrow{a_P} = C.\overrightarrow{N} \qquad \text{avec} \qquad C = G.\frac{M_S}{r^2} = Cte$$

On retrouve la forme du vecteur accélération d'un mouvement circulaire uniforme.

Dans le référentiel héliocentrique, le mouvement circulaire et uniforme d'une planète P est une solution de la seconde loi de Newton.

7- Expression de la vitesse du mouvement

7-1- Les planètes du système solaire

Dans le référentielle héliocentrique, l'accélération $\overrightarrow{a_P}$ pour une planète du système solaire située à la distance r du soleil est donnée par la relation:

$$\overrightarrow{a_P} = G.\frac{M_S}{r^2}.\overrightarrow{N}$$

Pour un mouvement circulaire de rayon **r** et uniforme de vitesse **v**, le vecteur accélération s'écrit:

$$\overrightarrow{a_P} = \frac{v^2}{r}.\overrightarrow{N}$$

Par comparaison de ces deux relations on en déduit l'expression de la valeur de la vitesse **v** de la planète sur son orbite.

Dans le référentiel héliocentrique, la valeur constante de la vitesse v d'une planète en mouvement circulaire de rayon r autour du soleil est:

$$v = \sqrt{\frac{G.M_S}{r}}$$

Cette valeur qui est une constante ne dépend que du rayon **r** de l'orbite de la planète.

Remarque: *Cette relation pourra être utilisée pour déterminer les vitesses d'objets en orbite autour d'un corps de masse* ***M*** *et dont le rayon de l'orbite est* ***r****.*

On a pour les différentes planètes du système solaire les valeurs données dans le tableau suivant avec $\mathbf{M_S=1,98.10^{30}kg}$.

Planètes	Rayon de l'orbite - r (10^6km)	Vitesse moyenne - V (km/s)
Mercure	57,9	47,8
Vénus	108,3	34,9
Terre	149,6	29,7
Mars	227,9	24,1
Jupiter	778,3	13,0
Saturne	1427,7	9,6
Uranus	2869,6	6,8
Neptune	4496,7	5,4

7-2-La Lune

La Lune évolue à une distance moyenne **r=384000km** de la Terre. La masse de la Terre étant $\mathbf{M_T=5,98.10^{24}kg}$, sa vitesse orbitale est donc:

$$v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} \times 5,98.10^{24}}{3,84.10^{8}}} = 1,02 km.s^{-1}$$

7-3-Les satellites terrestres

Le même raisonnement conduit à la vitesse:

$$v' = \sqrt{\frac{G.M_T}{r'}}$$

Dans cette expression, la masse $\mathbf{M_T}$ est celle de la Terre ($\mathbf{M_T=5,98.10^{24}kg}$) et la distance **r'** correspond à la distance du satellite au centre de la Terre:

$$r' = R_T + h$$

Dans cette expression $\mathbf{R_T}$ est le rayon de la Terre ($\mathbf{R_T=6,4.10^6km}$) et **h** l'altitude du satellite.

Pour un satellite géostationnaire évoluant à une altitude de **h=36000km** on aura ainsi:

$$v' = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} \times 5,98.10^{24}}{3,6.10^{7} + 6,4.10^{6}}} = 3,1 km.s^{-1}$$

8- Expression de la période T de révolution d'une planète

Tout mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse v est caractérisé par sa période de révolution T, égale à la durée d'un tour complet le long de sa trajectoire.

Remarque: *Il ne faut pas confondre période de révolution (autour de l'astre) et période de rotation (sur son axe).*

Pendant une période **T**, la planète parcourt une distance **2.π.r** correspondant à la circonférence d'une révolution. On aura ainsi pour la vitesse **v** l'expression:

$$v = \frac{2.\pi.r}{T} = \sqrt{\frac{G.M_S}{r}}$$

La période de révolution T d'une planète du système solaire d'orbite de rayon r est donnée par la relation:

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M_S}}$$

Pour un satellite artificiel terrestre on aura:

$$T' = 2.\pi.\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G.M_T}}$$

Ainsi, pour un satellite géostationnaire évoluant à l'altitude de **36000km**, on aura:

$$T' = 2.\pi.\sqrt{\frac{(3{,}6.10^7 + 6{,}4.10^6)^3}{6{,}67.10^{-11} \times 5{,}98.10^{24}}} = 8{,}7.10^4 s = 24h$$

9- Retour sur la troisième loi de Kepler

D'après la 3ème loi de Kepler le carré de la période **T** de révolution d'une planète est proportionnel au cube du demi grand axe **a** de son orbite elliptique:

$$T^2 = K.a^3$$

Dans cette expression, **K** est une constante commune à toutes les planètes du système solaire.

Si on assimile l'orbite de chaque planète à un cercle de rayon **r**, la loi devient:

$$T^2 = K.r^3$$

Dans un référentiel héliocentrique, la période T d'une planète est de la forme:

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{r^3}{G.M_S}}$$

D'où en élevant au carré:

$$T^2 = 4.\pi^2.\frac{r^3}{G.M_S}$$

Dans le référentiel héliocentrique, le rapport entre le carré de la période de révolution T de chaque planète et le cube du rayon r de l'orbite circulaire est constant:

$$K = \frac{T^2}{r^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_S}$$

On remarque que la constante K ne dépend d'aucun facteur relatif à la planète. Elle ne dépend que de la masse du soleil.

Voici un tableau que Kepler aurait pu faire pour consigner les résultats des observations de Tycho Brahé et de ses calculs, pour les planètes du système solaire.

Planète	Demi grand axe a ($\times 10^6$km)	Période de révolution T (jour)	Période de révolution T ($\times 10^6$s)	T^2/a^3 (jour^2.km^{-3})	T^2/a^3 (s^2.m^{-3})
Mercure	57,9	88,0	7,6	$3{,}98.10^{-11}$	$2{,}96.10^{-19}$
Vénus	108,2	224,7	19,4	$3{,}98.10^{-11}$	$2{,}96.10^{-19}$
Terre	149,6	365,3	31,5	$3{,}98.10^{-11}$	$2{,}96.10^{-19}$
Mars	227,9	687,0	59,2	$3{,}98.10^{-11}$	$2{,}96.10^{-19}$
Jupiter	778,3	4332,7	373,3	$3{,}98.10^{-11}$	$2{,}96.10^{-19}$

Une démarche analogue nous donne pour les satellites de Jupiter observés par Galilée le tableau suivant:

Satellite	Demi grand axe a ($\times 10^3$km)	Période de révolution T (jour)	Période de révolution T ($\times 10^6$s)	T^2/a^3 ($jour^2.km^{-3}$)	T^2/a^3 ($s^2.m^{-3}$)
Io	422	1,77	0,15	$4{,}17.10^{-8}$	$3{,}10.10^{-16}$
Europe	671	3,55	0,31	$4{,}17.10^{-8}$	$3{,}10.10^{-16}$
Ganymède	1070	7,15	0,62	$4{,}17.10^{-8}$	$3{,}10.10^{-16}$
Callisto	1883	16,69	1,44	$4{,}17.10^{-8}$	$3{,}10.10^{-16}$

La même démarche nous donne pour quelques satellites de la Terre le tableau suivant:

Satellite	Demi grand axe a ($\times 10^3$km)	Période de révolution T	Période de révolution T ($\times 10^6$s)	T^2/a^3 ($s^2.m^{-3}$)
Lune	384	27,32 jours	2 350 000	$9{,}78.10^{-14}$
Hipparcos	24,5	10h37min57s	38277	$9{,}91.10^{-14}$
NOAA 15	7,2	1h41min09s	6069	$9{,}91.10^{-14}$
GPS BII-01	26,6	11h58min08s	43088	$9{,}91.10^{-14}$
Globalstar MO48	7,8	1h54min4s	6844	$9{,}91.10^{-14}$

On observe bien que T^2/a^3 est une constante mais que cette constante dépend de l'astre attracteur.

En prenant en compte les résultas des tableaux ci-dessus, il est donc possible de déterminer la masse des astres.

On trouve par exemple:
- Pour le Soleil: **$M_S=2{,}00.10^{30}kg$**
- Pour Jupiter: **$M_J=1{,}91.10^{27}kg$**
- Pour la Terre: **$M_T=1{,}91.10^{27}kg$**

La constante obtenue avec la Lune est légèrement différente. Newton a déjà corrigé la troisième loi de Kepler en montrant que la masse qui intervenait était en fait la somme des masses des deux corps en interaction gravitationnelle (ici la Terre et la Lune).

En se servant de la correction de Newton on trouve **$M_{Terre+Lune}=6{,}05.10^{24}kg$** et par différence la masse de la Lune est **$M_L=7{,}36.10^{22}kg$**.

En fait, la troisième loi n'est qu'approchée et les bons résultats obtenus par Kepler sont dus au fait que la masse des planètes est négligeable devant celle du Soleil (Jupiter, la plus grosse planète a une masse qui ne dépasse pas le millième de celle du Soleil).